МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования   
**«Национальный исследовательский**   
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного**

**программирования**

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа: «Вычислительные методы и суперкомпьютерные технологии»

**ОТЧЕТ**

по пятой лабораторной работе

на тему:

**«**Динамический хаос на примере логистического отображения**»**

**Выполнил:** студент

группы 3824М1ПМвм

Ивлев А.Д.

Нижний Новгород  
 2025

**Оглавление**

[1. Введение и постановка задачи 3](#_Toc200751518)

[2. Методика проведения и результаты экспериментов 4](#_Toc200751519)

[3. Заключение 9](#_Toc200751520)

## Введение и постановка задачи

Важность отображения с дискретным временем обусловлена уникальными свойствами, практической применимостью и способностью моделировать сложное поведение простыми методами, например с помощью перехода от непрерывных систем к дискретным с помощью секущих Пуанкаре. Также они являются простейшими системами, где возникает динамический хаос.

Под отображением с дискретным временем подразумевают однозначные отображения . Неподвижной точкой отображения называют состояние , такое что . Устойчивость неподвижной точки в одномерном случае определяют с помощью значения модуля мультипликатора . Так при неподвижная точка устойчива, при неустойчива, а при требуются дополнительные исследования.

Неподвижной точкой отображения порядка p называют состояние , такое что , где – задаёт последовательное применение функции p раз. Устойчивость неподвижной точки порядка p определяется аналогично по значению .

Для апериодических траекторий для оценки устойчивости используется показатель Ляпунова: . Если , то траектории в среднем сходятся, при в среднем расходятся, а при , требуются дополнительные исследования, но обычно при происходят бифуркационные переходы.

Динамический хаос — фундаментальное явление, при котором системы демонстрируют непредсказуемое, непериодическое поведение с чувствительностью к начальным условиям. Для дискретных отображений его можно характеризовать асимптотической неустойчивостью (), наличием аттрактора, наличием бесконечных множеств апериодический и квазислучайных траекторий.

Простейшим примером системы с динамическим хаосом является логистическое отображение:

*(1)*

Оно имеет только один параметр r. Предлагается исследовать поведение данной системы в зависимость от данного параметра. Для этого необходимо:

* Построить диаграмму неподвижных точек в зависимости от параметра r
* Построить график показателя Ляпунова в зависимости от параметра r
* На основе полученных данных оценить изменения в поведении системы с ростом параметра r

## Методика проведения и результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: <https://github.com/Faert/NLD_Lab>.

Для построения диаграммы зависимости состояний равновесия в зависимости от параметра r используется функция states, которая просчитывает N итераций отображения, которое задаётся функцией func и строит диаграмму на основе последних M элементах последовательности. Исследование по параметру r происходит в отрезке [start, end] с шагом step.

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14 | **def** **states**(func, start, end, step, N, M):  **for** r **in** np.arange(start, end, step):  y=[x0]  **for** i **in** range(N):  y.append(func(y[i], r))  n = len(y)  m = min(len(y), M)  y=y[n-m:n]  x=[r ]\*m  plt.plot(x, y, color='black', linestyle=' ', marker='.', markersize =**0.75**)  plt.grid(**True**)  plt.xlabel('Параметр r')  plt.ylabel('x\*')  plt.show() |

Для построения графика показателя Ляпунова в зависимости от параметра r используется функция la\_, которая ввиду невозможности точного подсчёта предела уточняет результат пока изменение показателя Ляпунова или количество итераций не превышает N. Расчет происходит на основе производной исходной функции df, а исследование по параметру r происходит в отрезке [start, end] с шагом step.

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24 | **def** **la\_**(df, start, end, step, N):  ll = []  rl = []  **for** r **in** np.arange(start, end, step):  la = **0**  dla = **1**  x = x0  k = **1**  **while**(abs(dla) > **1**e-**6** **and** k < N):  dla = np.log(abs(df(x, r)))  x = f(x, r)  **if**(x > **1** **or** x < **0**):  **break**  k+=**1**  la+=dla  rl.append(r)  ll.append(la/k)  **if**(abs(ll[-**1**]) < **1**e-**2**):  print(r)  plt.plot(rl, ll)  plt.xlabel('Параметр r')  plt.ylabel('Показатель Ляпунова λ')  plt.grid(**True**)  plt.show() |

Для всех последующих экспериментов зафиксируем параметры , , и начальную точку . Также в ходе экспериментов было замечено, что при для любых начальных условий последовательность становится неограниченной, осциллируя с возрастающей амплитудой, поэтому будут рассмотрены только .

*Изображение выглядит как диаграмма, линия, График

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.*

Рисунок 1. Диаграмма зависимости состояний равновесия в зависимости от параметра

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.

Рисунок 2. График показателя Ляпунова в зависимости от параметра

На основе данных графиков можно явно выделить три участка:

* : Единственная устойчивая неподвижная точка .
* : При , происходит бифуркация, что также видно по показателю Ляпунова . Неподвижная точка становится неустойчивой, но появляется новая устойчивая неподвижная точка .
* : При , происходит бифуркация удвоения, что также видно по показателю Ляпунова . Неподвижная точка теряет устойчивость. Возникает устойчивый цикл периода 2.

Для дальнейшего исследования отмасштабируем графики на .

*Изображение выглядит как зарисовка, рисунок, диаграмма, линия

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.*

Рисунок 3. Диаграмма зависимости состояний равновесия в зависимости от параметра

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.

Рисунок 4. График показателя Ляпунова в зависимости от параметра

* При Происходит вторая бифуркация удвоения периода. Цикл периода 2 теряет устойчивость. Возникает устойчивый цикл периода 4.
* При Происходит третья бифуркация удвоения периода и возникает цикл периода 8.
* Далее происходит серия удвоений периода. При дальнейшем увеличении r последовательно возникают циклы периода 16, 32, 64 и так далее. Интервалы значений r, где существуют устойчивые циклы определенного периода, становятся все меньше, а точки бифуркации стремятся к предельному .
* После наступает динамический хаос c аттрактором , что видно из графика показателя Ляпунова, так как его значение становится больше нуля.

Для дальнейшего исследования отмасштабируем графики на и возьмём шаг равный .

Изображение выглядит как линия, диаграмма, зарисовка, График

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.

Рисунок 5. Диаграмма зависимости состояний равновесия в зависимости от параметра

На основе данной диаграммы видно, что среди хаоса есть окна периодичности. Попробуем найти окна с периодами 3 и 5 для этого ещё уменьшим масштаб.

Изображение выглядит как Прямоугольник, линия, зарисовка, прямоугольный

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.

Рисунок 6. Диаграмма зависимости состояний равновесия в зависимости от параметра

**Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Содержимое, созданное искусственным интеллектом, может быть неверным.**

Рисунок 7. График показателя Ляпунова в зависимости от параметра

Исходя из графиков окно с периодом 5 начинается при , а окно с периодом 3 при , что также подтверждается равенством показателя Ляпунова нулю при данных значениях. Также можно заметить, что на графиках присутствуют интервалы с другими периодами.

## Заключение

В рамках данной работы были построены диаграммы зависимости состояний равновесия и показателя Ляпунова в зависимости от параметра . На основе полученных данных были сделаны выводы о изменении в поведении системы в зависимости от параметра r. Интервалом с наиболее интересным поведением является , где наблюдается динамический хаос с окнами периодичности.